Лекция №5

§7. Теорема Гильберта-Шмидта.

Будем рассматривать интегральный оператор A, ядро которого $K(x,s)$ удовлетворяет следующим условиям: $K(x,s)$ – симметрическое, непрерывное по совокупности переменных на $[a,b]\times[a,b]$ и $K(x,s)\not\equiv 0$. В соответствии с результатами предыдущего параграфа этот оператор обладает конечной или бесконечной последовательностью характеристических чисел $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\ldots\le|\lambda_n|\le\ldots$, которым соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$, определяемых уравнением $\varphi(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,ds$.

Определение. Функция $f(x)$ называется <u>истокопредставимой</u> с помощью ядра $K(x,s)$, если существует непрерывная функция $g(s)$ такая, что $f(x)=\int\limits_a^b K(x,s)\,g(s)\,ds$ или, что тоже самое, $f=Ag$ (т.е. $f\in R(A)$ - множеству значений оператора A, действующего $h[a,b]\to h[a,b]$).

Любой функции $f(x)\in h[a,b]$ можно формально сопоставить ее ряд Фурье по системе функций $\varphi_k(x)$, т.е. $f(x)\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\,\varphi_k(x)$

Теорема Гильберта-Шмидта. Если функция $f(x)$ истокопредставима с помощью непрерывного симметрического ядра $K(x,s)$, то она может быть разложена в ряд

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,\varphi_k(x), \qquad \text{где} \qquad f_k=(f,\varphi_k)=\int_a^b f(s)\,\varphi_k(s)\,ds,$$

причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[a,b]$.

<u>Доказательство</u>. 1) Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\,\varphi_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$. Будем рассматривать случай, когда характеристических чисел бесконечно много (в противном случае очевидно, что ряд сходится).

Заметим, что $f_k=(f,\varphi_k)=(Ag,\varphi_k)=(g,A\varphi_k)=(g,\dfrac{\varphi_k}{\lambda_k})=\dfrac{g_k}{\lambda_k}$. Итак, нам надо доказать равномерную и абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k\,\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$.

Для доказательства применим критерий Коши равномерной сходимости. Для нас представляет интерес сумма

$$\sum_{k=n+1}^{k=n+p}\left|g_k\,\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\le\sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k^2\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}},$$

где n и p – произвольные натуральные числа (здесь мы использовали неравенство Коши-Буняковского для сумм вещественных чисел).

а) Из неравенства Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k^2\le\int\limits_a^b g^2(s)\,ds$ следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k^2$ сходится, т.к. состоит из неотрицательных чисел, и все частичные суммы его ограничены.

б) Заметим, что $\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} = \int\limits_a^b K(x,s)\,\varphi_k(s)\,ds$, т.к. $\varphi_k(x)$ – собственная функция, соответствующая характеристическому числу λ_k. Если фиксировать $x \in [a,b]$, то $\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$ - коэффициент Фурье ядра $K(x,s)$, и можно записать неравенство Бесселя для $K(x,s)$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right)^2 \le \int\limits_a^b K^2(x,s)\,ds \le K_o^2\,(b-a), \quad \text{где} \quad K_o = \max_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|.$$

В то же время, из неравенства Бесселя для функции $g(x)$ следует, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k^2$ сходится, и выполняется критерий Коши как *необходимое* условие его сходимости, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall n \ge N\ \ \forall p \ge 1\quad \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} g_k^2 \le \dfrac{\varepsilon^2}{K_o^2\ (b-a)}$. Но тогда при тех же $\varepsilon,\ N,\ n,\ p$ имеет место оценка $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \left| g_k \dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \le \varepsilon$, т.е. выполнен критерий Коши как *достаточное* условие равномерной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| g_k \dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|$.

Итак, равномерная и абсолютная сходимость ряда Фурье доказана.

2) Докажем, что ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\ \varphi_k(x)$ сходится к функции $f(x)$. Так как ряд состоит из непрерывных функций и сходится равномерно на $[a,b]$, то его сумма – непрерывная на $[a,b]$ функция. Обозначим $\omega(x) = f(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\ \varphi_k(x)$. Надо доказать, что $\omega(x) \equiv 0$.

Докажем, что $\omega(x)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_i(x)$. Действительно,

$$(\omega,\varphi_i) = \int\limits_a^b \omega(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx - \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k\ \varphi_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx = f_i - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \int\limits_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx =$$
$$= f_i - f_i = 0 \qquad \forall i = 1,2,...$$

(возможность изменения порядка интегрирования и суммирования следует из равномерной сходимости ряда).

Так как функция $\omega(x)$ ортогональна всем $\varphi_i(x)$, то (см. предыдущий параграф), $\omega(x)$ принадлежит нуль-пространству оператора A, т.е. $A\omega = 0$. Далее

$$\int\limits_a^b \omega^2(x)\,dx = \int\limits_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k\ \varphi_k(x)]\,\omega(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx = (f,\omega) = (Ag,\omega) = (g, A\omega) = 0.$$

Изменение порядка интегрирования и суммирования возможно в силу доказанной выше равномерной сходимости ряда Фурье. Так как $\omega(x)$ – непрерывная функция, то $\omega(x) \equiv 0$. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа сформулируем без доказательства некоторые обобщения полученных результатов.

Можно рассматривать задачу в многомерном случае. Пусть Ω - замкнутая ограниченная область $\Omega \subseteq R^n$, для которой можно определить указанные ниже интегралы. Введем пространство $h[\Omega]$, состоящее из функций, непрерывных в Ω, со скалярным произведением $(y_1, y_2) = \int\limits_{\Omega} y_1(x)\, y_2(x)\, dx, \quad dx = dx_1\, dx_2 ... dx_n$. Рассмотрим многомерное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с ядром $K(x,s)$

$$y(x) = \lambda \int\limits_{\Omega} K(x,s) y(s) ds + f(x), \qquad x, s \in \Omega .$$

Если ядро непрерывно и симметрично по переменным x, s, то все результаты, полученные выше, остаются верными и в многомерном случае.

В курсе методов математической физики рассматриваются ядра $K(x,s) = \dfrac{\Phi(x,s)}{|x-s|^{\alpha}}$, где $\Phi(x,s)$ непрерывная в Ω по совокупности аргументов и симметрическая функция, $|x-s| = r_{xs}$ - расстояние между точками x и s в пространстве R^n.

Если $\alpha < n$, где $n = \dim R^n$, то ядро $K(x,s)$ называется *полярным*. Для таких ядер доказывается, что интегральный оператор A: $h[\Omega] \to h[\Omega]$ является вполне непрерывным. Таким образом, для интегральных операторов с полярными ядрами справедливы теоремы о существовании хотя бы одного собственного значения и теоремы о построении последовательности собственных значений.

Если $\alpha < \dfrac{n}{2}$ ($n = \dim R^n$), то ядро $K(x,s)$ называется *слабополярным*. Для таких ядер справедлива также и теорема Гильберта-Шмидта.

Все результаты могут быть перенесены на случай комплексных пространств $h[a,b]$ и $h[\Omega]$, но вместо требования симметричности ядра, если ядро является комплексным, надо потребовать $K(x,s) = K^*(s,x)$, для любых x, s из Ω, где $*$ - знак комплексного сопряжения.

§8. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x) \equiv \lambda A y + f .$$

Пусть ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных, симметрично и $K(x,s) \not\equiv 0$; $\lambda \neq 0$ - вещественное число (в противном случае решение находится тривиально); $f(x)$ - заданная непрерывная функция; $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$ - последовательность характеристических чисел интегрального оператора, которым соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$.

Допустим, что решение уравнения существует. Преобразуем искомую функцию так, чтобы она стала истокопредставимой. Для этого будем искать решение в виде $y(x) = f(x) + g(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$f(x) + g(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\big(f(s) + g(s)\big) ds + f(x) .$$

Сократив $f(x)$, получим уравнение для $g(x)$, операторная форма которого

$$g = \lambda A (g + f) .$$

Решение этого уравнения, если оно есть, является истокопредставимым. Следовательно, по теореме Гильберта-Шмидта, функция $g(x)$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра $K(x,s)$:

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\,\varphi_k(x).$$

Вычисляя коэффициенты Фурье функций g и $\lambda A(g+f)$, получаем

$$g_k=\lambda\big(A(g+f),\varphi_k\big)=\lambda\big(g+f,A\varphi_k\big)=\lambda\left(g+f,\frac{\varphi_k}{\lambda_k}\right)=\frac{\lambda}{\lambda_k}\big(g_k+f_k\big)\qquad k=1,2,\dots,$$

Для определения g_k необходимо решить систему уравнений

$$g_k(\lambda_k-\lambda)=\lambda f_k,\quad k=1,2,\dots .$$

Возможны два случая.

1) $\lambda\neq\lambda_k,\quad k=1,2,\dots$.

Тогда $g_k=\dfrac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k$, и можно формально записать ряды Фурье $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k\,\varphi_k(x)$ и $y(x)=f(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k\,\varphi_k(x)$. Чтобы последний ряд Фурье на самом деле являлся решением, достаточно доказать, что этот ряд сходится равномерно на сегменте $[a,b]$.

Заметим, что $|\lambda_k|\to\infty$, поэтому при любом λ, начиная с некоторого номера k, выполняется оценка

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right|=\left|\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|\cdot\frac{1}{\left|1-\dfrac{\lambda}{\lambda_k}\right|}\leq 5\left|\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|.$$

Тогда для достаточно больших n и любого натурального p имеем

$$\sum_{n+1}^{n+p}\left|f_k\,\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x)\right|\leq 5|\lambda|\left|\sum_{n+1}^{n+p}\frac{f_k\,\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|.$$

Далее, как в предыдущем параграфе, доказывается, что выполняется критерий Коши как *достаточное* условие равномерной сходимости, т.е. ряд Фурье сходится равномерно.

Замечание. Запишем решение уравнения в следующем виде:

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_a^b f(s)\,\varphi_k(s)\,ds}{\lambda_k-\lambda}\cdot\varphi_k(x).$$

Предположим, что можно поменять местами суммирование и интегрирование, тогда

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}\right)}_{R(x,s,\lambda)}f(s)\,ds,$$

или $y(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b R(x,s,\lambda)\,f(s)\,ds$.

В операторной форме уравнение Фредгольма 2-го рода имеет вид $y=\lambda Ay+f$, или $(I-\lambda A)y=f$. Т.к. решение существует и единственно, то $y=(I-\lambda A)^{-1}f=f+\lambda R_\lambda f$, где R_λ - интегральный оператор с ядром $R(x,s,\lambda)$. В операторном виде полученный результат можно записать так: $(I-\lambda A)^{-1}=I+\lambda R_\lambda$.

Определение. Ядро $R(x,s,\lambda)$ называется резольвентой.

Рассмотрим теперь второй случай.

2) $\lambda=\lambda_n$.

Пусть сначала λ_n – простое характеристическое число. Тогда при $k\neq n$ $(\lambda_k-\lambda)\,g_k=\lambda\,f_k$, $k=1,2,...;\ k\neq n$, следовательно $g_k=\dfrac{\lambda f_k}{\lambda_k-\lambda}$.

При $k=n$ имеем $0\cdot g_n=\lambda\cdot f_n$, где $\lambda\neq 0$. Если $f_n\neq 0$, $f_n=(f,\varphi_n)$, то последнее уравнение не имеет решения, а значит и исходное уравнение решений не имеет. Если же $f_n=0$, то получаем $g_n=c_n$, где c_n - произвольная постоянная, т.е. решений бесконечно много.

Наконец, пусть λ_n - характеристическое число кратности r. В этом случае получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}0\cdot g_n=\lambda\,f_n\\ 0\cdot g_{n+1}=\lambda\,f_{n+1}\\ \cdots\\ 0\cdot g_{n+r-1}=\lambda\,f_{n+r-1}\end{cases}.$$

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда все коэффициенты Фурье $f_n,\ f_{n+1},\ \cdots,\ f_{n+r-1}$ равны нулю. Если хотя бы один коэффициент Фурье не равен нулю, то система не имеет решений, а, следовательно, и исходное уравнение не имеет решений. Другими словами, условием разрешимости является ортогональность функции $f(x)$ всем собственными функциям, соответствующим характеристическому числу λ_n. В этом случае решение не единственно и дается формулой

$$y(x)=f(x)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq n\\ \dots\\ k\neq n+r-1}}^{\infty}\frac{\lambda\,f_k}{\lambda_k-\lambda}\ \varphi_k(x)+c_n\,\varphi_n(x)+...+c_{n+r-1}\,\varphi_{n+r-1}(x),$$

где $c_n,...,c_{n+r-1}$ - произвольные константы. Ряд, записанный в данном представлении, сходится абсолютно и равномерно.

В результате проведенного исследования мы доказали две теоремы.

Теорема.

Если однородное уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром имеет только тривиальное решение (т.е. $\lambda\neq\lambda_k$, $k=1,2,...$), то неоднородное уравнение имеет, и притом, единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x)$.

Если однородное уравнение имеет нетривиальное решение, т.е. $\lambda=\lambda_k$ при некотором k, то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, если неоднородность – непрерывная функция $f(x)$ – ортогональна всем собственным функциям, соответствующим данному λ (т.е. всем решениям однородного уравнения). В последнем случае, если решение существует, то оно не единственно.

Теорема. (Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическими ядрами).

Либо неоднородное уравнение имеет решение для любой непрерывной функции $f(x)$, либо однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

<u>Экзаменационные вопросы</u>

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение функции, истокопредставимой с помощью ядра интегрального оператора.
2. Сформулировать теорему Гильберта-Шмидта.
3. Сформулировать определение интегрального оператора с полярным ядром.
4. Сформулировать определение интегрального оператора со слабо полярным ядром.
5. Сформулировать определение резольвенты интегрального оператора.
6. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром.
7. При каком условии неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$ - неоднородности уравнения?
8. Сформулировать условие разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром в случае, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение. Сколько решений имеет неоднородное уравнение, если оно разрешимо?

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать теорему Гильберта-Шмидта.
2. Построить решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром с помощью разложения в ряд Фурье по собственным функциям ядра и доказать альтернативу Фредгольма.