

Лекция №3

§4. Существование собственного значения вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве L . Число Λ называется собственным значением оператора A , если существует элемент $y \neq 0$ такой, что $Ay = \Lambda y$. Элемент y называется собственным вектором. Множество собственных векторов, соответствующих собственному значению Λ , является подпространством пространства L (докажите это самостоятельно).

Если $\Lambda \neq 0$, то число $\lambda = \frac{1}{\Lambda}$ называется характеристическим числом оператора A .

Пусть выполнены следующие условия для оператора A :

- 1) $A: E \rightarrow E$ (E – бесконечномерное евклидово пространство, например, $h[a, b]$);
- 2) $A = A^*$;
- 3) A – вполне непрерывный оператор.

Далее будет показано, что при этих условиях оператор A имеет по крайней мере одно собственное значение.

Предварительно сформулируем и докажем ряд утверждений, из которых и будет следовать этот важный результат.

Лемма 1. Пусть A – самосопряженный оператор, и e – произвольный элемент пространства E такой, что $\|e\| = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\|Ae\|^2 \leq \|A^2e\|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда e является собственным вектором оператора A^2 , отвечающим собственному значению $\Lambda = \|Ae\|^2$.

Доказательство. Из неравенства Коши-Буняковского легко получить

$$\|Ae\|^2 = (Ae, Ae) = (A^2e, e) \leq \|A^2e\| \cdot \|e\| = \|A^2e\|,$$

причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда элементы A^2e и e линейно зависимы, т.е. $A^2e = \Lambda e$. Итак, e – собственный вектор оператора A^2 .

Для того чтобы найти Λ , умножим равенство $A^2e = \Lambda e$ скалярно на e . Учитывая, что $(A^2e, e) = (Ae, Ae) = \|Ae\|^2$ и $\|e\| = 1$, получим, что $\Lambda = \|Ae\|^2$.

Пусть теперь e – собственный вектор оператора A^2 , соответствующий собственному значению $\Lambda = \|Ae\|^2$. Тогда $A^2e = \|Ae\|^2 e$ и $\|A^2e\| = \|Ae\|^2$. Лемма 1 доказана.

Определение. Элемент e называется максимальным элементом (вектором) оператора A , если $\|e\| = 1$ и $\|Ae\| = \|A\|$.

Как было доказано в предыдущем в параграфе, вполне непрерывный оператор является ограниченным.

Лемма 2. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A обладает максимальным вектором.

Доказательство. Обозначим $\|A\| = M$. По определению нормы оператора существует последовательность y_n , $\|y_n\| = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, такая, что $z_n = Ay_n$ обладает свойством $\|z_n\| \rightarrow \|A\| = M$. Так как последовательность y_n ограничена, и оператор A – вполне непрерывный, то из последовательности z_n можно выделить сходящуюся

подпоследовательность $z_{n_k} \rightarrow z \in E$. Переобозначим $z_{n_k} = z_n$. Из сходимости $z_n \rightarrow z$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что $\|z_n\| \rightarrow \|z\| = M$.

Покажем, что элемент $\tilde{z} = \frac{z}{M}$ является максимальным вектором оператора A .

Рассмотрим последовательность $\tilde{z}_n = \frac{z_n}{M}$. На основании леммы 1 имеем

$$\|A\tilde{z}_n\| = \left\| \frac{Az_n}{M} \right\| = \frac{1}{M} \|A^2 y_n\| \geq \frac{1}{M} \|Ay_n\|^2 = \frac{1}{M} \|z_n\|^2.$$

С другой стороны, $\|A\tilde{z}_n\| \leq \|A\| \|\tilde{z}_n\| = \|A\| \left\| \frac{z_n}{M} \right\| = \|z_n\|$, и этих двух неравенств вытекает

$$\frac{\|z_n\|^2}{M} \leq \|A\tilde{z}_n\| \leq \|z_n\|.$$

Поскольку $\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z}$ и $\|z_n\| \rightarrow M$ то, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в последнем соотношении, получим $M \leq \|A\tilde{z}\| \leq M$, или $\|A\tilde{z}\| = M$, т.е. $\tilde{z} = \frac{z}{M}$ является максимальным вектором для оператора A .

Лемма 3. Если z - максимальный вектор самосопряженного оператора A , то z - собственный вектор оператора A^2 , соответствующий собственному значению $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$.

Доказательство. Из определения максимального вектора следует

$$M^2 = \|A\|^2 = \|Az\|^2 \leq \|A^2 z\| \leq \|A^2\| \|z\| = \|A^2\| \|A\|^2 = M^2,$$

т.е. $\|Az\|^2 = \|A^2 z\|^2$. Отсюда, согласно лемме 1, следует, что z - собственный вектор оператора A^2 , соответствующий собственному значению $\Lambda = \|Az\|^2 = \|A\|^2 = M^2$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. Если оператор A^2 обладает собственным вектором z , соответствующим собственному значению M^2 , то оператор A имеет собственный вектор, отвечающий собственному значению M или $-M$.

Доказательство. Так как z - собственный вектор оператора A^2 , то $z \neq 0$ и $A^2 z = M^2 z$. Перепишем это равенство в виде $(A^2 - M^2 I)z = 0$, где I - единичный оператор, или $(A - MI)(A + MI)z = 0$.

Возможны два случая. Пусть сначала $u = (A + MI)z \neq 0$. Тогда $(A - MI)u = 0$ или $Au = Mu$, т.е. u - собственный вектор оператора A , соответствующий собственному значению M .

Если же $u = (A + MI)z = 0$, то z - собственный вектор оператора A , отвечающий собственному значению $-M$.

Теорема. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A , действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению Λ , причем $|\Lambda| = \|A\|^2$.

Доказательство. Согласно лемме 2 оператор A обладает максимальным вектором z . Лемма 3 утверждает, что этот вектор z является собственным вектором оператора A^2 , соответствующим собственному значению $\|A\|^2$, а из леммы 4 следует, что оператор A имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению $\|A\|$ или $-\|A\|$, т.е. $|\Lambda| = \|A\|^2$. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема, вообще говоря, не верна, если отказаться от условий самосопряженности или вполне непрерывности оператора.

Пример. Вполне непрерывный оператор, который не имеет ни одного собственного значения, это, например, невырожденный оператор Вольтерра с непрерывным ядром. Этот результат мы получим позднее.

Пример. Рассмотрим оператор умножения на x , а именно такой, что для любого элемента y из $h[a, b]$ (непрерывной функции $y(x)$) $Ay = x \cdot y(x)$. Оператор A самосопряженный, т.к. для любых $y_1(x), y_2(x)$ из $h[a, b]$ верно

$$(Ay_1, y_2) = \int_a^b x y_1(x) y_2(x) dx = \int_a^b y_1(x) x y_2(x) dx = (y_1, Ay_2).$$

Оператор A не имеет собственных значений, т.к. если Λ - его собственное значение, то $x \cdot y(x) = \Lambda y(x)$, из чего следует, что $y(x) \equiv 0$ при $x \in [a, b]$, а это противоречит определению собственного вектора.

Рассмотрим теперь оператор Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x, s) y(s) ds$, действующий

$h[a, b] \rightarrow h[a, b]$. Пусть ядро $K(x, s)$ оператора удовлетворяет следующим условиям:

- 1) вещественное,
- 2) непрерывное по совокупности переменных (x, s) ,
- 3) не равное тождественно нулю,
- 4) симметрическое.

Теорема. Пусть выполнены условия 1)-4) для ядра интегрального оператора Фредгольма $A: h[a, b] \rightarrow h[a, b]$. Тогда этот оператор обладает собственным значением Λ , $\Lambda \neq 0$: $Ay = \Lambda y$, $y \neq 0$, $y \in h[a, b]$.

Замечание. В теории интегральных уравнений удобнее использовать характеристические числа, а именно $\lambda = \frac{1}{\Lambda}$, $\Lambda \neq 0$. Тогда в утверждении теоремы следует записать $\lambda Ay = y$.

Доказательство. Ранее было доказано, что оператор Фредгольма является вполне непрерывным, а при условии симметричности ядра и самосопряженным. Тем самым, по доказанной выше теореме оператор Фредгольма имеет хотя бы одно собственное значение. Для того, чтобы проверить, что указанное собственное значение не равно нулю, достаточно доказать следующее утверждение, что рекомендуем проделать читателю самостоятельно:

Утверждение. Пусть A - линейный ограниченный оператор, $A: N_1 \rightarrow N_2$, где N_1 и N_2 - нормированные пространства, и $A \neq 0$. Тогда $\|A\| > 0$.

§5. Построение последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Пусть вполне непрерывный самосопряженный оператор A действует в бесконечномерном евклидовом пространстве $h[a, b]$. В предыдущем параграфе мы доказали, что такой оператор обладает собственным значением Λ : $Az = \Lambda z$, $|\Lambda| = \|A\|$.

Очевидно, что это собственное значение является максимальным по модулю. В самом деле, пусть $\tilde{\Lambda}$ - другое собственное значение, т.е. $A\tilde{z} = \tilde{\Lambda}\tilde{z}$. Будем считать, что $\|\tilde{z}\| = 1$ (иначе просто нормируем \tilde{z}). Тогда $|\tilde{\Lambda}| = \|A\tilde{z}\| \leq \|A\| \|\tilde{z}\| = \|A\| = |\Lambda|$. Тем самым, любое другое собственное значение, если оно есть, по модулю не превосходит $\|A\|$.

Рассмотрим процедуру построения последовательностей собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного оператора A .

В предыдущем параграфе мы доказали существование собственного значения Λ_1 , такого, что $|\Lambda_1| = \|A\|$. Сопоставим Λ_1 собственный вектор φ_1 . Будем считать $\|\varphi_1\| = 1$. Обозначим $H_1 = h[a, b]$ - все исходное бесконечномерное евклидово пространство. Пусть оператор $A \neq 0$ (очевидно, что нулевой оператор имеет и притом только нулевое собственное значение).

Рассмотрим множество H_2 векторов y таких, что $(y, \varphi_1) = 0$, $y \in H_1$, (т.е. H_2 - ортогональное дополнение к φ_1). Отметим его следующие свойства.

а) H_2 - линейное пространство. Действительно, для любых вещественных чисел α_1, α_2 и любых элементов y_1 и y_2 таких, что $(y_1, \varphi_1) = 0$ и $(y_2, \varphi_1) = 0$ верно $(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \varphi_1) = 0$.

б) H_2 - замкнуто, т.е. если последовательность $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ и $(y_n, \varphi_1) = 0$, то $(y, \varphi_1) = 0$ (из того, что $y_n \in H_2$ и $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ следует, что $y \in H_2$).

Доказательство. Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|(y_n, \varphi_1) - (y, \varphi_1)| = |(y_n - y, \varphi_1)| \leq \underbrace{\|y_n - y\|}_{\rightarrow 0} \|\varphi_1\| \Rightarrow |(y_n, \varphi_1) - (y, \varphi_1)| \rightarrow 0.$$

А т.к. $(y_n, \varphi_1) = 0$, то и $(y, \varphi_1) = 0$.

в) H_2 - инвариантное подпространство относительно оператора A , т.е. $AH_2 \subseteq H_2$ (из того, что $y \in H_2$ следует, что $z = Ay \in H_2$).

Доказательство. $(z, \varphi_1) = (Ay, \varphi_1) = (y, A\varphi_1) = (y, \Lambda_1 \varphi_1) = \Lambda_1 (y, \varphi_1) = 0$.

Итак, H_2 - линейное бесконечномерное евклидово пространство. Далее будем рассматривать оператор $A: H_2 \rightarrow H_2$.

Очевидно, что оператор A - вполне непрерывный самосопряженный - и $\|A\|_{H_2 \rightarrow H_2} \leq \|A\|_{H_1 \rightarrow H_1} = \|A\|$. Тогда по теореме предыдущего параграфа оператор A , действующий $H_2 \rightarrow H_2$, имеет собственное значение Λ_2 , которому соответствует собственный вектор φ_2 , причем $|\Lambda_2| = \|A\|_{H_2 \rightarrow H_2} = \sup_{\substack{y: \|y\|=1 \\ (y, \varphi_1)=0}} \|Ay\|$. Будем считать, что $\|\varphi_2\| = 1$.

Если $\Lambda_2 = 0$, то процесс построения собственных значений заканчивается. В противном случае введем далее множество H_3 , состоящее из векторов y таких, что $(y, \varphi_1) = 0$, $(y, \varphi_2) = 0$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно доказать, что оператор A , отображающий $H_3 \rightarrow H_3$, вполне непрерывный и самосопряженный, и по теореме предыдущего параграфа имеет собственное значение такое, что

$$|\Lambda_3| = \|A\|_{H_3 \rightarrow H_3} = \sup_{\substack{y: \|y\|=1 \\ (y, \varphi_1)=0 \\ (y, \varphi_2)=0}} \|Ay\|,$$

которому сопоставим собственный вектор φ_3 . Будем считать, что $\|\varphi_3\| = 1$.

Если $\Lambda_3 = 0$, то процесс заканчивается. В противном случае введем пространство H_4 и т.д.

Возможны два случая.

1) для любого $n = 1, 2, \dots$ выполнено $\|A\|_{H_n \rightarrow H_n} \neq 0$. Тогда мы получаем бесконечные последовательности Λ_n и φ_n .

2) Для некоторого n $H_{n+1} \neq 0$, но $\|A\|_{H_{n+1} \rightarrow H_{n+1}} = 0$, т.е. для некоторого n сужение оператора A на пространство H_{n+1} станет нулевым оператором. Тогда $\Lambda_{n+1} = 0$ и процесс построения прекращается.

Замечание. Очевидно, что $|\Lambda_3| \leq |\Lambda_2| \leq |\Lambda_1|$.

Замечание. Для оператора Фредгольма важна последовательность характеристических чисел $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$. Тогда следует рассматривать следующие два варианта:

- 1) бесконечное число λ_n ;
- 2) конечное число λ_n .

Теорема. Собственные векторы самосопряженного оператора A , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть $A\varphi_1 = \Lambda_1\varphi_1$, $A\varphi_2 = \Lambda_2\varphi_2$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, φ_1 и φ_2 – соответствующие собственные векторы. Тогда

$$0 = (A\varphi_1, \varphi_2) - (A\varphi_2, \varphi_1) = \underbrace{(\Lambda_1 - \Lambda_2)}_{\neq 0} (\varphi_1, \varphi_2), \text{ из чего следует } (\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Теорема. Число различных собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора A , удовлетворяющих условию $\|A\| \geq |\Lambda| \geq \delta > 0$, где δ – фиксированное положительное число, конечно.

Доказательство. Предположим, что собственных значений бесконечно много. Выберем последовательность (различных) собственных значений $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n, \dots$ и для каждого собственного значения выберем собственные вектора $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ ($\|\varphi_n\| = 1 \quad \forall n = 1, 2, \dots$), по предыдущей лемме они образуют ортонормированную систему.

Оператор A – вполне непрерывный. Следовательно, из последовательности $A\varphi_n = \Lambda_n\varphi_n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Покажем, что это не так. Возьмем произвольные натуральные числа i и j , $i \neq j$. Тогда

$$\|A\varphi_i - A\varphi_j\|^2 = \|\Lambda_i\varphi_i - \Lambda_j\varphi_j\|^2 = (\Lambda_i\varphi_i - \Lambda_j\varphi_j, \Lambda_i\varphi_i - \Lambda_j\varphi_j) = \Lambda_i^2 + \Lambda_j^2 \geq 2\delta^2 > 0,$$

т.е. никакая подпоследовательность последовательности $A\varphi_n = \Lambda_n\varphi_n$ не является фундаментальной, а, следовательно, никакая подпоследовательность не может сходиться.

Определение. Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению, называется кратностью собственного значения.

Теорема. Ненулевому собственному значению вполне непрерывного оператора A может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов.

Доказательство. Пусть $\Lambda \neq 0$, и Λ соответствует бесконечно много линейно независимых собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$. Применив процедуру Грама-Шмидта, хорошо известную из курса линейной алгебры, мы можем преобразовать $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ в ортонормированную систему. А тогда доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы, если мы обозначим $|\Lambda| = \delta > 0$. А именно, поскольку $\|\varphi_n\| = 1$, $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $i \neq j$, а $A\varphi_n = \Lambda\varphi_n$, из последовательности $A\varphi_n$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность,

поскольку $\|A\varphi_i - A\varphi_j\|^2 = 2|\Lambda|^2 > 0$ при $i \neq j$. Этот результат противоречит тому, что оператор A является вполне непрерывным.

Замечание. Нулевому собственному значению может соответствовать как конечное, так и бесконечное число линейно независимых собственных векторов.

Если существует последовательность линейно независимых собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, то, используя процедуру Грама-Шмидта, ее можно преобразовать в ортонормированную систему.

Напомним формулы процедуры Грама-Шмидта. По заданной последовательности векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ строятся последовательности $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ и $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ по формулам:

$$\text{на первом шаге} \quad - \quad \psi_1 = \varphi_1, \quad e_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|};$$

$$\text{на } n\text{-ом шаге} \quad - \quad \psi_n = \varphi_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, e_k) e_k, \quad e_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}.$$

Теперь сформулируем основные результаты о построении последовательности собственных значений, упорядоченных в порядке невозрастания модуля: $|\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq \dots \geq |\Lambda_n| \geq \dots$. Каждое собственное значение повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность.

Каждому собственному значению соответствует собственный вектор, причем можно выбрать собственные векторы так, что они образуют ортонормированную систему. На самом деле, собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям ортогональны, а собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно ортогонализировать, используя процедуру Грама-Шмидта.

Если ненулевых собственных значений бесконечно много, то $|\Lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Действительно, последовательность $|\Lambda_n|$ является монотонно невозрастающей и ограниченной снизу (нулем). Поэтому эта последовательность имеет предел. Если этот предел больше нуля, то мы получаем противоречие с доказанным выше утверждением о том, что число собственных значений, модули которых превышают любое фиксированное положительное число, конечно.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение собственного значения линейного оператора.
2. Сформулировать определение собственного вектора линейного оператора.
3. Сформулировать определение максимального вектора линейного оператора.
4. Сформулировать определение инвариантного подпространства линейного оператора.
5. Сформулировать определение кратности собственного значения линейного оператора.
6. Сформулировать определение собственной функции ядра интегрального оператора Фредгольма.
7. Сформулировать определение вырожденного линейного оператора.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать следующее утверждение: пусть A - самосопряженный оператор, действующий в евклидовом пространстве E , и e – произвольный вектор из E , $\|e\|=1$. Тогда справедливо

неравенство $\|Ae\|^2 \leq \|A^2e\|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда e является собственным вектором оператора A^2 , соответствующим собственному значению $\Lambda = \|Ae\|^2$.

2. Доказать следующее утверждение: самосопряженный вполне непрерывный оператор A , действующий в евклидовом пространстве E , обладает максимальным вектором.
3. Доказать следующее утверждение: если z - максимальный вектор самосопряженного оператора A , действующего в евклидовом пространстве E , то z - собственный вектор оператора A^2 , соответствующий собственному значению $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$.
4. Доказать следующее утверждение: пусть оператор A действует в евклидовом пространстве E , и оператор A^2 обладает собственным вектором z , соответствующим собственному значению M^2 . Тогда оператор A имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению M или $-M$.
5. Сформулируйте последовательность утверждений, из которых следует теорема: самосопряженный вполне непрерывный оператор A , действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению Λ : $|\Lambda| = \|A\|$.
6. Доказать теорему: оператор Фредгольма с вещественным, непрерывным по совокупности аргументов, не равным тождественно нулю, симметрическим ядром обладает собственным значением Λ , $\Lambda \neq 0$: $Ay = \Lambda y$, $y \neq 0$, $y \in h[a, b]$.
7. Доказать, что собственное значение Λ линейного оператора A такое, что $|\Lambda| = \|A\|$, является максимальным по модулю.
8. Доказать, что число собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора A , действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве, удовлетворяющих условию $|\Lambda| \geq \delta > 0$, конечно.
9. Доказать, что ненулевому собственному значению вполне непрерывного оператора A , действующему в бесконечномерном евклидовом пространстве, может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов.
10. Доказать, что если самосопряженный вполне непрерывный оператор A , действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, имеет бесконечную последовательность собственных значений Λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, то $|\Lambda_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.
11. Описать процесс построения собственных значений и собственных функций вполне непрерывного самосопряженного оператора A , действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве.
12. Пусть φ - собственный вектор самосопряженного оператора A , действующего в евклидовом пространстве. Доказать, что множество векторов, ортогональных φ , образуют замкнутое линейное подпространство, инвариантное относительно A .
13. Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x, s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a, b]$ (комплексном расширении пространства $h[a, b]$), то этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.
14. Приведите пример самосопряженного оператора, действующего в пространстве $h[a, b]$ и не имеющего собственных значений.
15. Приведите пример вполне непрерывного оператора, действующего в пространстве $h[a, b]$ и не имеющего собственных значений.
16. Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора A , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.
17. Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора A , соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.